

翻天覆地，顛倒黑白-黑白摺學摺紙謎題之探究

摘要

「黑白摺學」是一個將 8×8 方格的紙摺成 4×4 方格，且使兩面分別為黑色和白色的摺紙遊戲。本研究先探討可以將紙摺平的條件，再探討解決各謎題之摺法。研究結果發現，要將紙摺成 4×4 方格，通過任意交點的摺線數，也就是山線與谷線的和必為 4 或 6。此外，山線與谷線的差必為 2。此外，透過對摺、山谷山峰摺、轉摺、青蛙摺、閃電摺與箭頭摺六種摺法可以解決黑白摺學的 100 個謎題，更能夠應用來解決 9×9 方格摺成 4×4 方格的黑白摺學 2 的謎題。最後我們根據研究結果，設計出阿美族圖騰的黑白摺學謎題。

關鍵字:摺紙、對稱圖形、正方形

壹、前言

有一天，爸爸說他發現了一個有趣的摺紙遊戲，叫做「黑白摺學」。我好奇的看著爸爸摺。爸爸摺過來摺過去，翻過來又翻過去，竟然將原本在紙張同一面的黑白方格，分別集中在正方形的兩面，變成黑白顛倒的正方形! 如下圖 1。

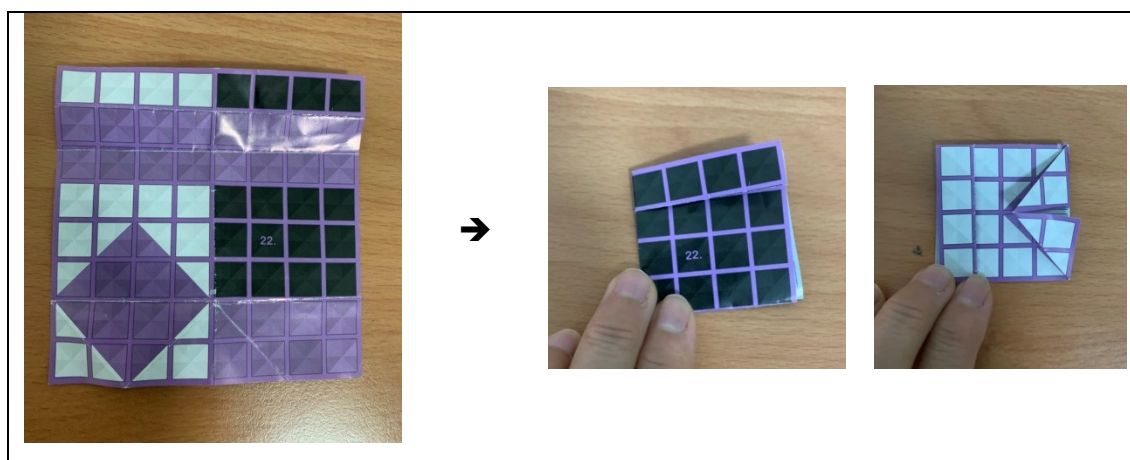


圖 1

我覺得很神奇，便也摺了起來。這個遊戲總共有 100 個謎題，我發現有些謎題很快就解出，但有些題目我卻怎麼摺都很難把同顏色方格摺在一塊，而有時候雖然能將同顏色方塊湊在一塊，但紙張卻翹起來，如下圖 2。

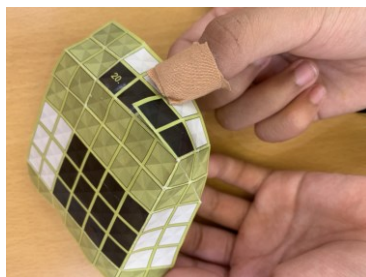


圖 2

有時好不容易摺出來了，想跟爸爸分享，卻又忘了怎麼摺。我想起老師說，要了解數學背後的原理或找到規律才算真正理解，我想，這些謎題應該也存在一些原理與有規律的摺法，如果我能找出來，應該可以很快解題成功，而且不會忘記怎麼摺。我將「黑白摺學」推薦給同學玩，同學也覺得很有挑戰性，因此燃起我們研究「黑白摺學」的興趣。

在解題的過程中，我們查覺到兩件事：(一)將 8×8 的紙摺成 4×4，表示摺法必須使紙變平，不能翹起來。(二)同色色塊的形狀與摺法有關。此外，我們想如果可以將我們美麗的阿美族圖騰設計成黑白摺學摺紙謎題，讓大家透過摺紙多認識阿美族，那是多有意義的事啊!因此，我們的研究目的為：

- 一、探究將 8×8 方格的紙摺平成 4×4 方格的條件。
- 二、探究色塊形狀與摺法的關聯。
- 三、設計阿美族圖騰的謎題。

貳、研究設備及器材

黑白摺學、方格紙、紙、筆、電腦、Excel 軟體。

參、研究過程或方法

一、為便於討論，我們將黑白摺學的謎題(以下簡稱為謎題)畫在方格紙上，原黑色部分我們塗上紫色，白色部分塗上藍色。我們在摺時發現，往自己的方向摺，摺線會凸出；往桌面方向摺，摺線會凹入，我們查找文獻時發現，在摺紙時，我們稱凸出的線為山線，摺法稱為山峰摺或山摺；凹入的線稱為谷線，摺法稱為山谷摺或谷摺。為記錄方便，我們以紅線表示山線，藍線表示谷線，並以 a_1 、 a_2 、 a_3 …… a_n 表示山線與谷線的交點，如下圖 3:

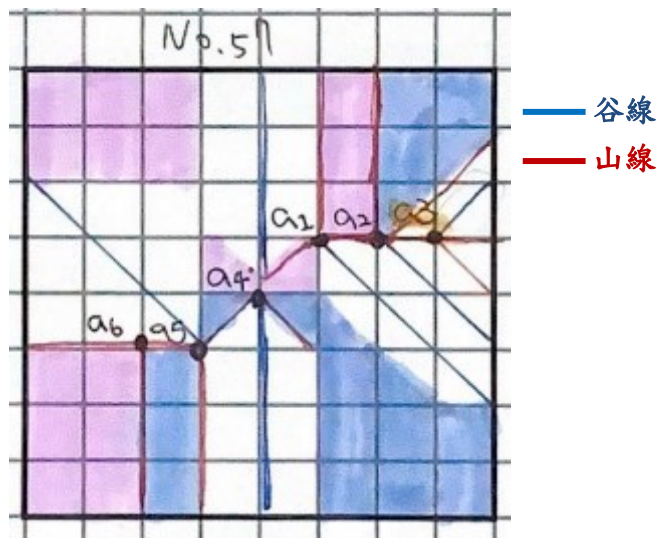


圖 3

二、使用 Excel 軟體做資料整理

我們將各個交點的山線與谷線數量等輸入在 Excel 軟體，除了方便整理資料外，也利用老師教我們的公式，快速算出總和與差，如下圖 4。

編號	難度	摺法	交點總數	交點編號	山線	谷線	摺線總數	山線摺線差
1	51 難	牛角	14	a1	3	1	4	2
2				a2	1	3	4	-2
3				a3	3	1	4	2
4				a4	1	3	4	-2
5				a5	3	1	4	2
6				a6	3	1	4	2
7				a7	1	3	4	-2
8				a8	3	1	4	2
9				a9	1	3	4	-2
10				a10	3	1	4	2
11				a11	3	1	4	2
12				a12	1	3	4	-2
13				a13	1	3	4	-2
14				a14	3	1	4	2
15								
16								
17	42 中	牛角	4	a1	4	2	6	2
18				a2	4	2	6	2
19				a3	4	2	6	2
20				a4	4	2	6	2

圖 4 利用 Excel 整理資料

肆、研究結果

一、探究將 8×8 的紙摺平成 4×4 的條件

我們發現，將同顏色方塊湊在一起時，紙張經常是翹起來的，要解題成功，紙張必須是平的。由於黑白摺學的謎題是將 8×8 的紙摺成 4×4 摺成正方形，考量摺後得的正方形四個頂點一定是摺線的交點，而且摺出的角為直角，所以通過任何一個交點最多可能的摺線是 6 條，

如下圖 5。此外摺線也不可能都是山線或谷線，也就是山線谷線摺線數不可能為 0。

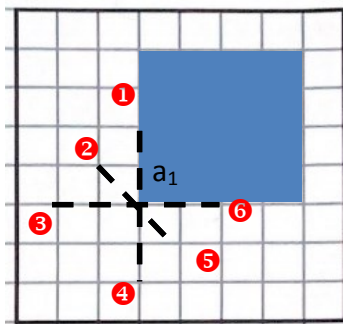


圖 5

接著我們分別討論 2 條、3 條、4 條、5 條和 6 條摺線時，山線數與谷線數分配的情況，整理如下表 1。

表 1 摺線總數、山線數、谷線數情況與能否摺平紙張一覽表

摺線數	山線數	谷線數	紙張是否能摺平
2	1	1	否
3	2	1	否
	1	2	否
4	1	3	是
	2	2	否
	3	1	是
5	1	4	否
	2	3	否
	3	2	否
	4	1	否
6	1	5	否
	2	4	是
	3	3	否
	4	2	是
	5	1	否

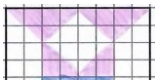
結果發現，只有在山線谷線摺線數總和為 4 或 6 的情況下，且(山線數，谷線數)=(1, 3)、(3, 1)、(2, 4)、(4, 2)這四種情況下，才可能將紙摺成平面。

二、探究色塊形狀與摺法的關聯

(一)六種摺法

解謎時，光是將紙摺成平面還不夠，同色色塊還必須能拚湊在一起。經過多方嘗試，我們找出了 6 種摺法，整理如下表 2：

表 2 黑白摺學謎題 6 種摺法

摺法	同色色塊形狀	謎題編號舉例
對摺	同色色塊(邊或頂點)相連	13
	同色色塊為對稱圖形	2
山谷山峰摺	同色色塊相隔完整列	1、5、3
	同色色塊為對稱圖形	
轉摺	同色色塊旋轉 90 度後能拼湊在一起	18、20、39、40、45、53、55、 60、66、68、 71、75、77、
青蛙摺		4、16、23、30、32
閃電摺	空白處像閃電	67
箭頭摺	空白處像箭頭	73

以下說明各種摺法：

1. 對摺

對摺是最基本，也是最常用到的摺法，可以沿著格線對摺，也可不沿格線。往自己或桌面的方向摺，可以摺出山線或谷線，如下圖 6。

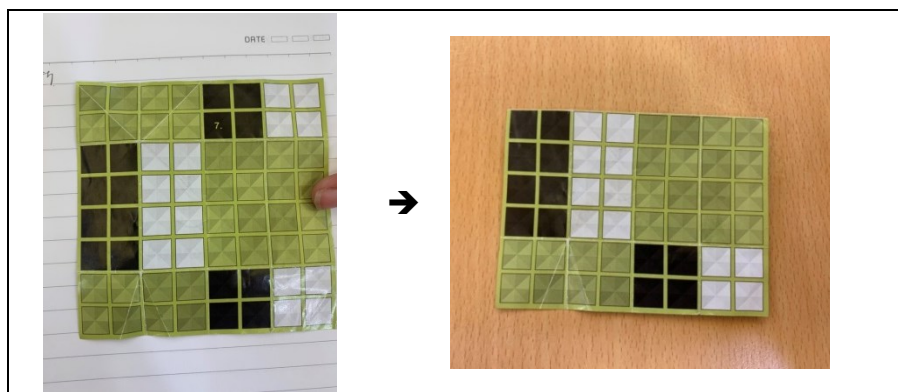


圖 6 對摺摺法 舉例

2. 山谷山峰摺

如果同色色塊間有完整的空白列，可以在空白列中央做出谷線，一側的色塊邊做出山線，就可以將同色色塊湊在一起，我們將這樣的摺法稱為山谷山峰摺，如下圖 7 和圖 8。

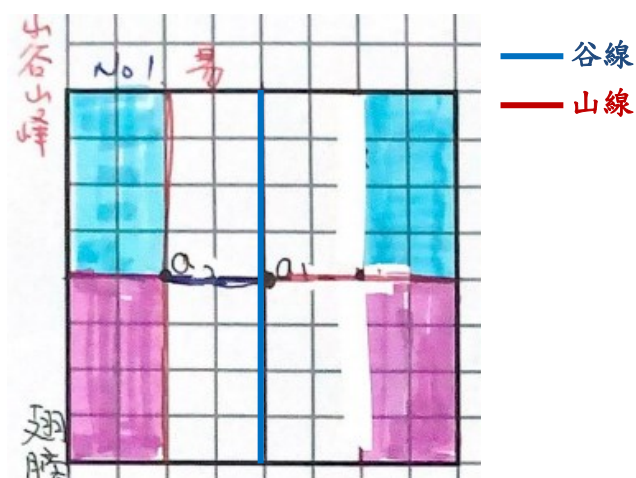


圖 7



圖 8 山谷山峰摺舉例

3. 轉摺

如果色塊旋轉九十度後就能跟另一個同色色塊拼湊在一起，我們可以先在兩個同色色塊之間做出一條谷線，再沿著其中一個色塊的邊做出山線，就能將兩色塊拼摺在一起，我們稱這樣的摺法稱為轉摺。如下圖 9，同色色塊均為 2×1 的長方形，A 色塊旋轉九十度可以跟 B 色塊拼湊在一起。

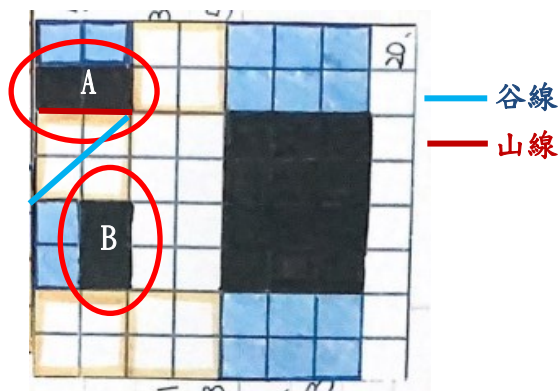


圖 9

我們可以在 A 色塊和 B 色塊間先做出一條谷線，沿著 A 色塊的邊做出山線，就可以 A、B 兩色塊摺湊在一起，如下圖 10。

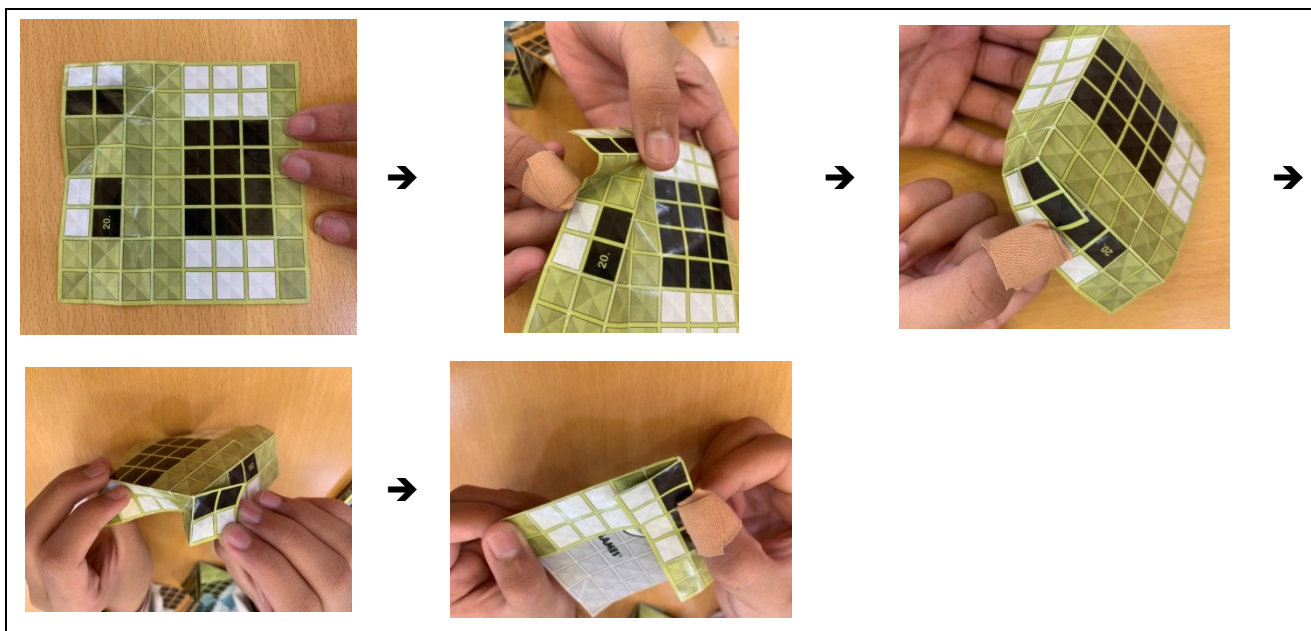


圖 10 轉摺 舉例 1

又如下圖 11，A 色塊旋轉九十度可以跟 B 色塊拼湊在一起，我們便可以利用轉摺法將兩色塊拼摺在一起。

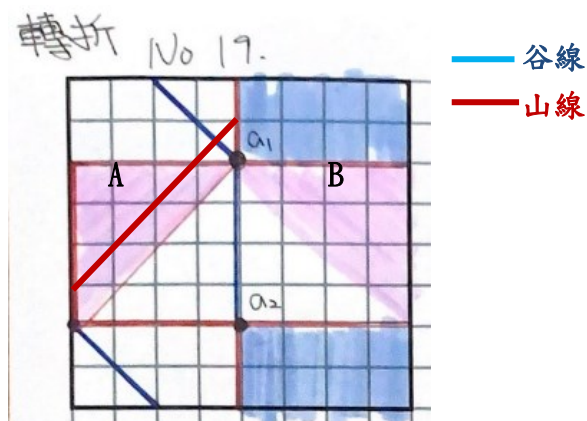


圖 11

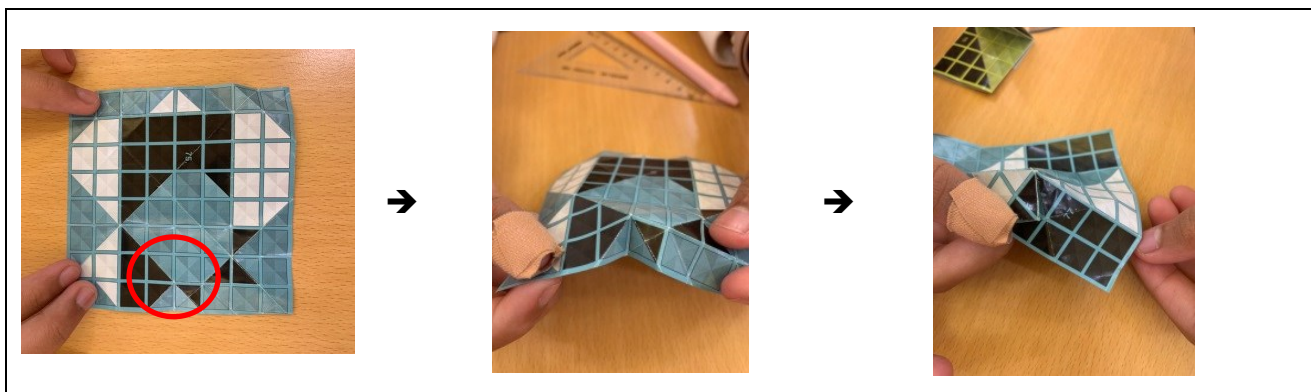


圖 12 轉摺 舉例 2

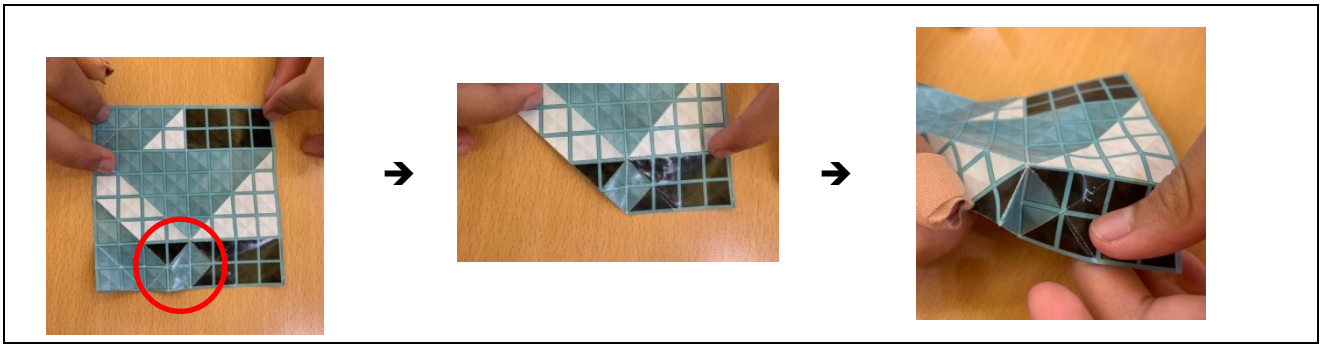


圖 13 轉摺 舉例 3

要特別注意的是，轉折摺法因為摺出 3 條山線，一條谷線，所以紙張會翹起來，如上圖 12 與圖 13 的第三個圖。根據研究結果一，我們可以得知山線和谷線數為 4、1 時，紙張才能摺平，因此，我們必須再在做出 1 條山線與 1 條谷線才能使紙張是平的，如下圖 14。

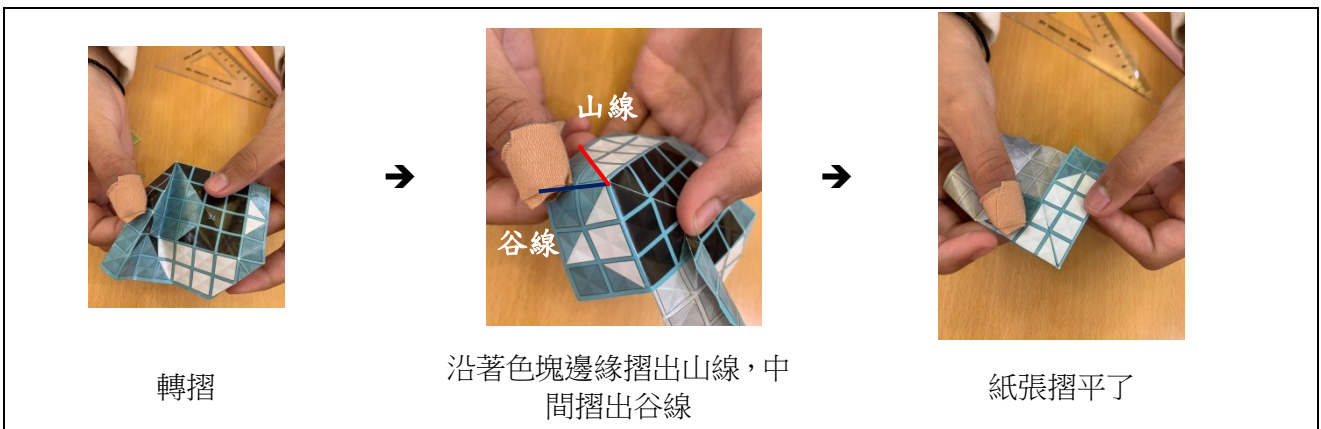


圖 14 轉摺後須再做出 1 條山線和 1 條谷線才能使紙是平的

4. 青蛙摺

如果色塊拼摺後如下圖 15 中的第二個圖，我們除了須在空白處摺出谷線外，還要將兩側的山線往內摺，將它們變成谷線，這樣原來在背面的同色三角形色塊才會位於同一面，這樣的摺法很像摺青蛙的手法，所以我們將它稱為青蛙摺法。

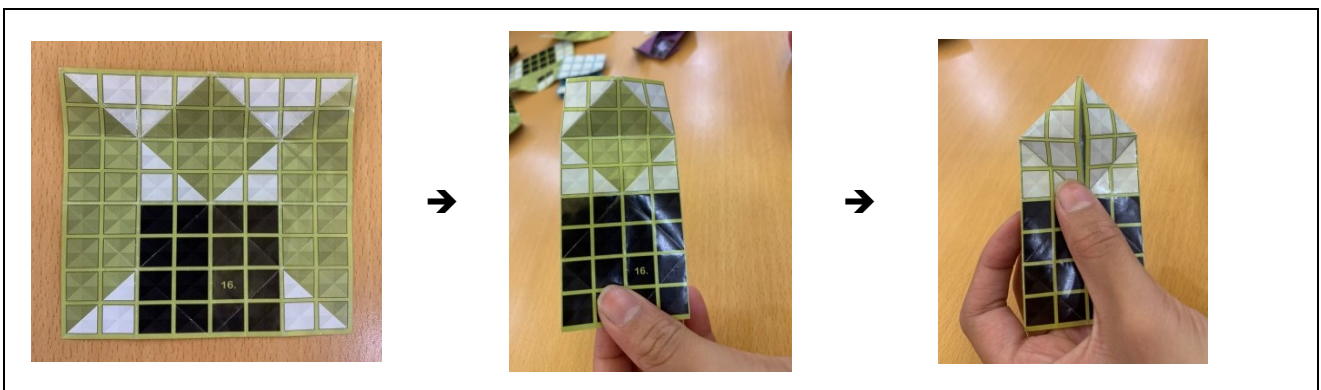


圖 15 青蛙摺法 舉例

5.閃電摺

100 道謎題中，有一道謎題(編號 67)空白處像閃電，它的摺法很特別，重點為沿著中央正方形四條邊做出山摺，從點 a_2 和 a_4 處沿線做出谷摺，就能將同色色塊湊在一起，摺後的紙也是平的，如下圖 16 和圖 17。我們把它稱為閃電摺。

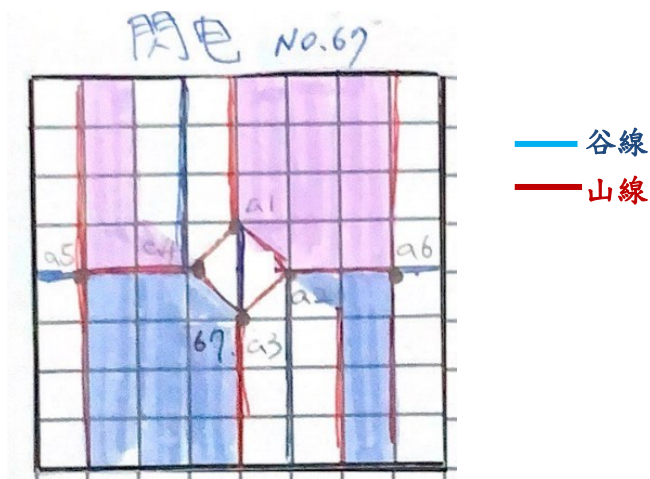


圖 16

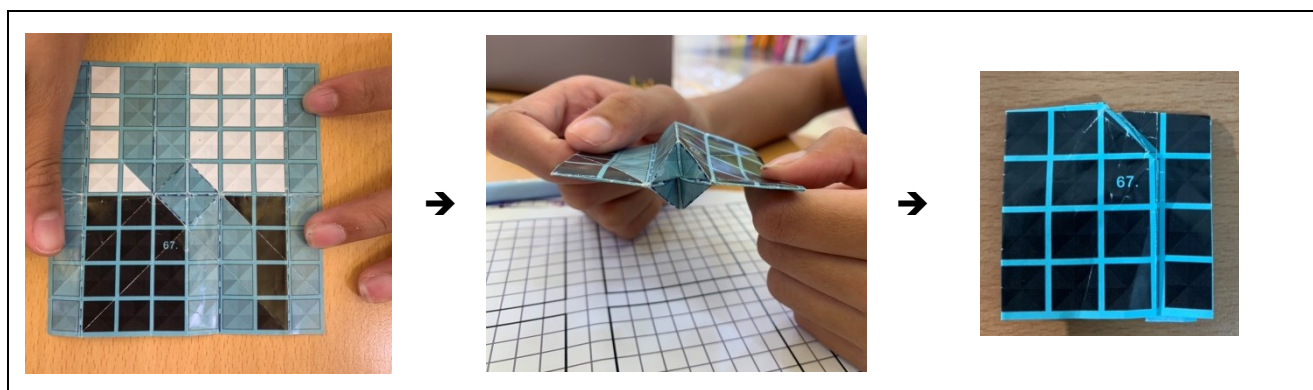


圖 17 閃電摺法

6 箭頭摺

有的謎題空白處像箭頭，它的摺法也很特殊，重點是沿著中央正方形四條邊做出山摺，從點 a_1 處沿線做出谷摺，就能將同色色塊湊在一起，摺後的紙也是平的，如下圖 18 和圖 19。我們把它稱為閃電摺。

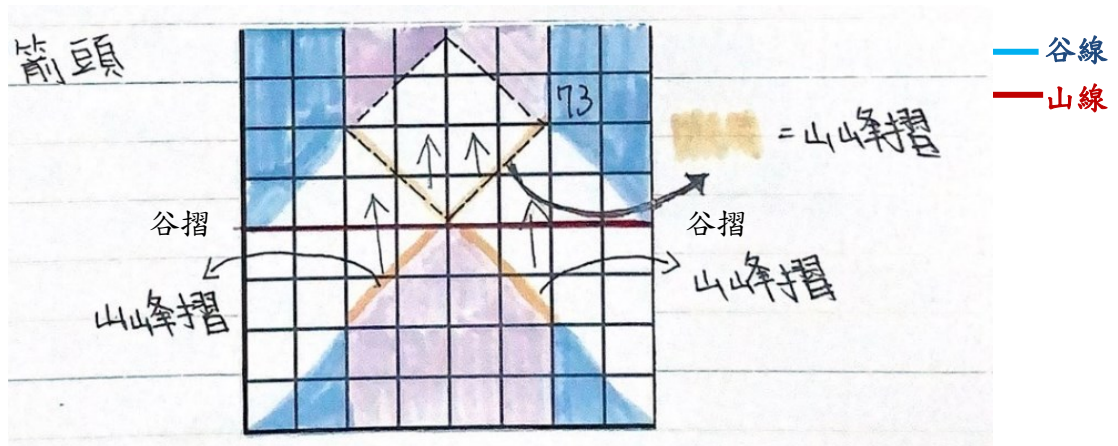


圖 18

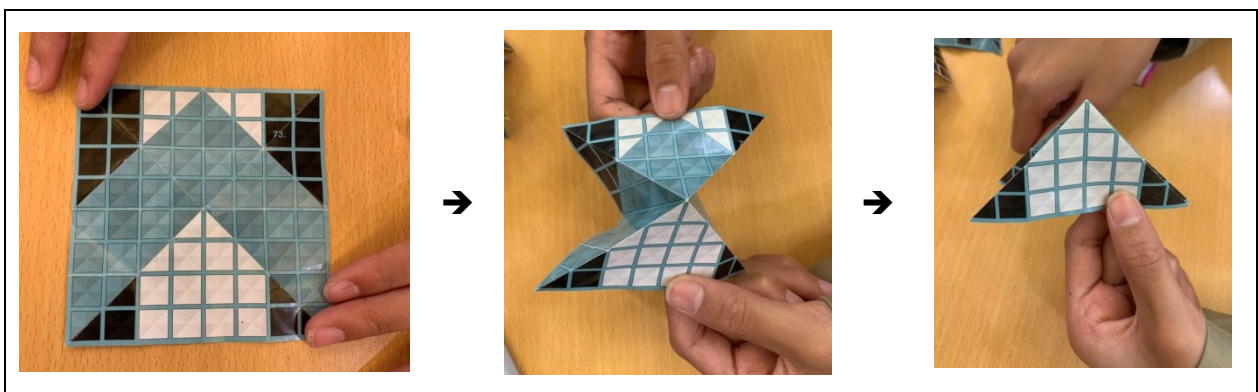


圖 19

(二)三種特殊色塊配置及搭配摺法

我們發現從色塊的配置可以看出可能的摺法，例如色塊配置如果像閃電，就可能是使用上一小節中的閃電摺法；色塊配置像箭頭，就可能使用箭頭摺法。我們另外還整理出三種特殊的色塊配置，以及搭配的摺法，幫助我們更快速解題，如下表 3：

表 3 三種特殊的色塊配置、搭配摺法以及謎題舉例

色塊配置	應用	謎題編號舉例
翅膀	對摺	6、8、13、19、15
房子	轉摺和山谷山峰	31、43、58、69、62、63、59、80、70、65、74
牛角	對摺	16、26、38、47、50、76

以下為各類型說明：

1. 翅膀色塊配置的摺法

同色色塊或空白處像翅膀，如下圖 20，我們稱為翅膀。翅膀色塊配置會用到兩次對摺：沿著三角形斜邊摺出山線，就可以將空白處摺到背面或將色塊湊在一起，如下圖 21。

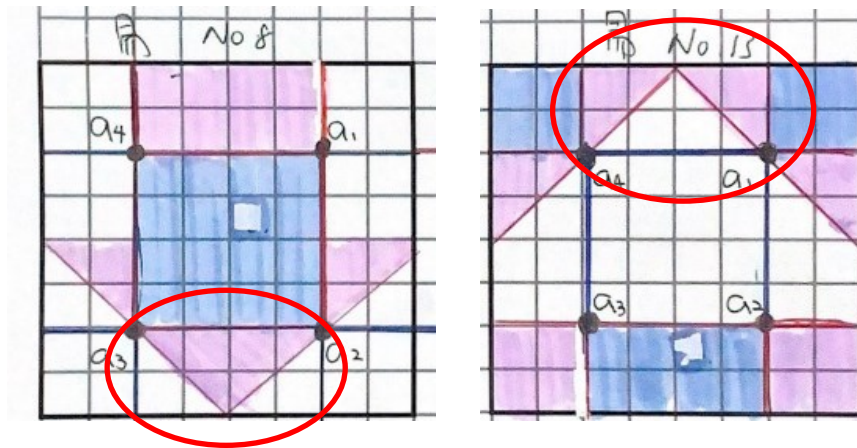


圖 20 翅膀色塊配置舉例

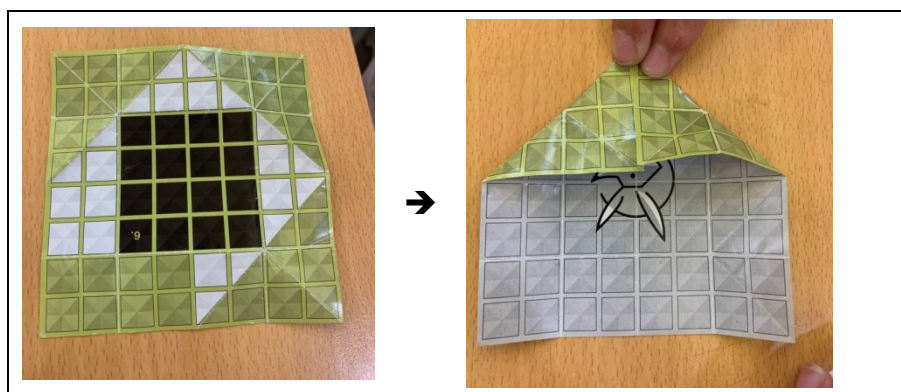


圖 21 翅膀色塊配置摺法舉例 1

2. 房子色塊配置的摺法

空白處像房子，如下圖 22，我們稱為房子。房子色塊配置的摺法會用倒轉摺和山谷山峰摺：沿著房子中間格線摺出谷線，在屋頂一側摺出山線，就可以將色塊湊在一起，如下圖 23 和圖 24。

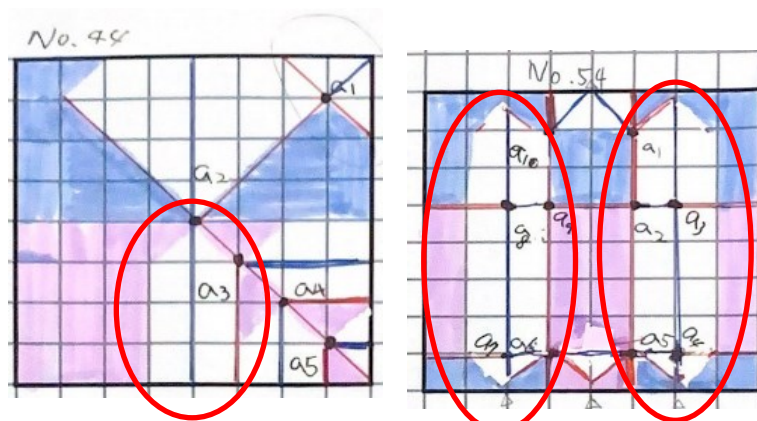


圖 22 房子色塊配置舉例

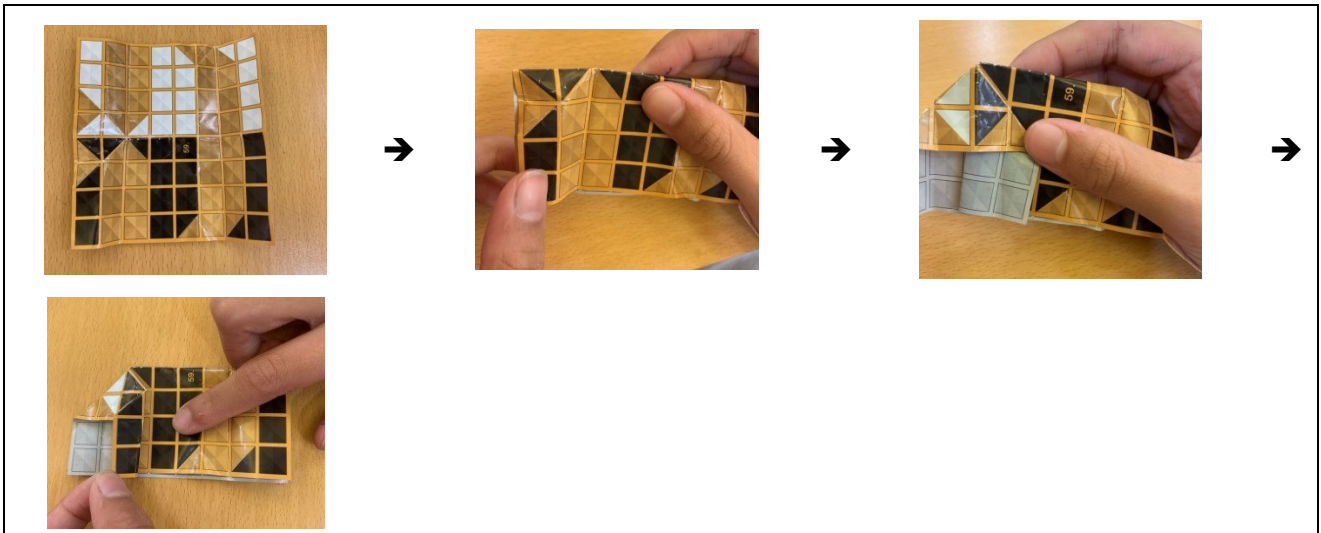


圖 23 房子色塊配置摺法舉例 1

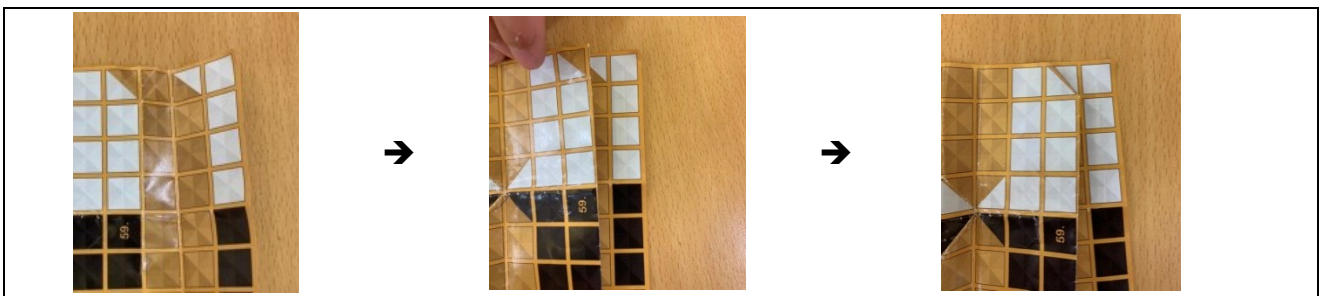


圖 24 房子色塊配置摺法舉例 2

3.牛角色塊配置的摺法

同色色塊與空白處的配置像牛角，我們稱為牛角。牛角色塊配置會用到三次對摺，摺法如下圖 25。

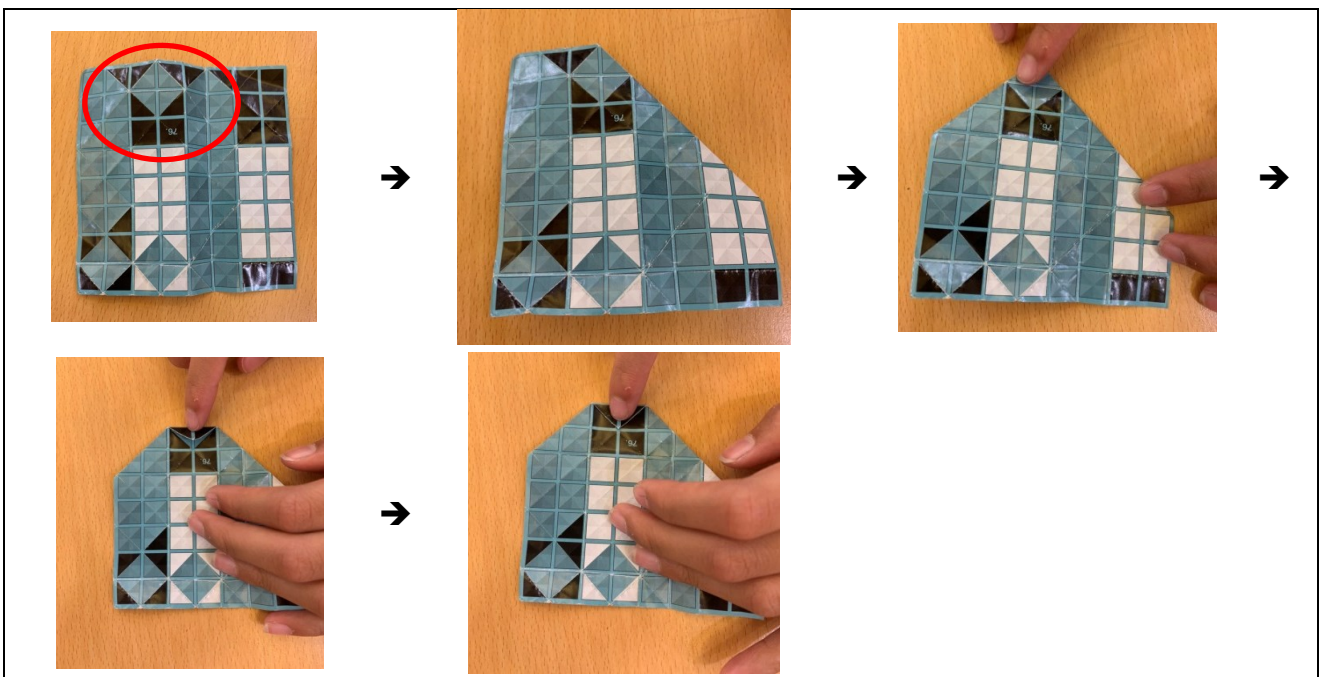


圖 25 牛角色塊配置摺法舉例

三、設計阿美族圖騰的謎題

我們的阿美族圖騰有美麗的大地顏色，有象徵勇士、女性與家庭的圓滿意象。我們參考阿美族語老師帶學長姐製作的編織圖案，如下圖 26，逆向思考，利用研究結果一二的發現，先將 8×8 的正方形方格摺成 4×4 的小正方形方格，再將圖案繪製上去，打開後，就是我們自己設計的阿美族圖騰謎題囉!下表 4 中的圖都是我們設計的阿美族圖騰謎題。



圖 26 阿美族象徵勇士的圖騰

表 4 阿美族圖騰黑白摺謎題

謎題	摺出的美麗阿美族圖騰

續上表 4 阿美族圖騰黑白摺謎題

謎題	摺出的美麗阿美族圖騰
	
	
	
	
	

伍、討論

一、由研究結果一知，交點的山線和谷線數總和必為 4 或 6，黑白摺學交點的山線和谷線數僅有 4 種可能：(山線數，谷線數)=(1, 3)、(3, 1)、(2, 4)、(4, 2)。我們將解謎成功後各個謎題的摺線，分成山線和谷線畫在方格紙上，如附件，數出摺線數與交點個數，輸入 Excel 軟體做整理，如下圖 27，再次驗證了這樣的結果。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	編號	難度	摺法	交點總數	交點編號	山線	谷線	摺線總數	山線摺線差
2		51 難	牛角	14	a1	3	1	4	2
3					a2	1	3	4	-2
4					a3	3	1	4	2
5					a4	1	3	4	-2
6					a5	3	1	4	2
7					a6	3	1	4	2
8					a7	1	3	4	-2
9					a8	3	1	4	2
10					a9	1	3	4	-2
11					a10	3	1	4	2
12					a11	3	1	4	2
13					a12	1	3	4	-2
14					a13	1	3	4	-2
15					a14	3	1	4	2
16									
17		42 中	牛角	4	a1	4	2	6	2
18					a2	4	2	6	2
19					a3	4	2	6	2
20					a4	4	2	6	2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	編號	難度	摺法	邊上頂點數	平頂點總數	平頂點編號	山線	谷線	摺線總數	山線摺線差
		8 易	翅膀	0	4	a1	3	1	4	2
						a2	4	2	6	2
						a3	4	2	6	2
						a4	3	1	4	2
		13 易	翅膀	0	4	a1	4	2	6	2
						a2	3	1	4	2
						a3	3	1	4	2
						a4	4	2	6	2
		15 中	翅膀	0	2	a1	3	1	4	2
						a2	4	2	6	2
		6 中	翅膀	0	4	a1	3	1	4	2
						a2	4	2	6	2
						a3	4	2	6	2
						a4	4	2	6	2

圖 27

同時，我們也注意到交點的山線數和谷線數的差都是 2，這也呼應研究結果一：(山線數，谷線數)僅能有(1, 3)、(3, 1)、(2, 4)、(4, 2)，沒有其他可能。

這樣的結果能幫助我們在解其他謎題時，利用已摺出的山線數與谷線數，判斷下一步可以怎麼摺。

二、觀察色塊配置可以作為摺法的參考，但不一定是使用搭配的摺法，應做全盤的考量。

陸、結論

一、交點摺線數、山線數與谷線數存在有一定的關係。

要將一張 8×8 方格的紙摺成 4×4 方格，通過交點的摺線數，也就是山線與谷線的和必為 4 或 6。此外，山線與谷線的差必為 2，由此可知山線數與谷線數僅有(1, 3)、(3, 1)、(2, 4)、(4, 2)四種可能。

二、利用六種摺法、三種特殊色塊配置搭配知摺法可以成功解出黑白摺學謎題。

三、利用研究結果一、二可以解決黑白摺學 2 的謎題

「黑白摺學 2」的謎題為 9×9 方格，同樣要摺成 4×4 方格。利用研究結果一和二，我們可以成功解決黑白摺學 2 的謎題!舉例如下：

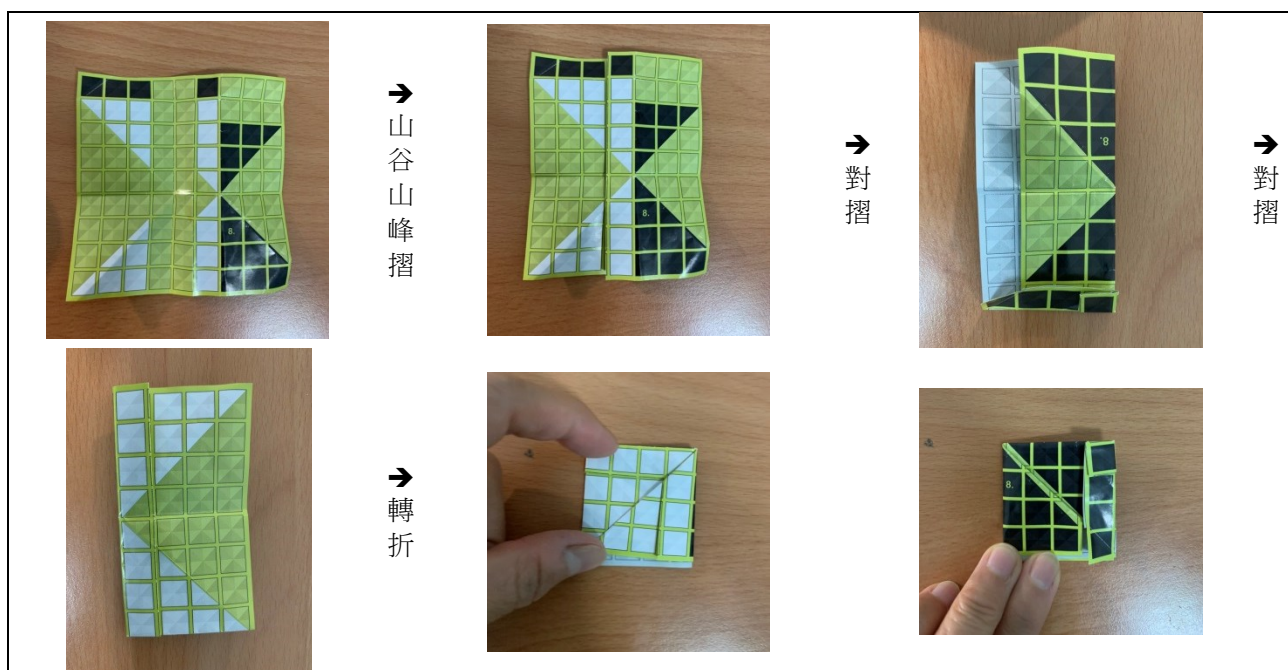


圖 28 利用研究結果解「黑白摺學 2」謎題

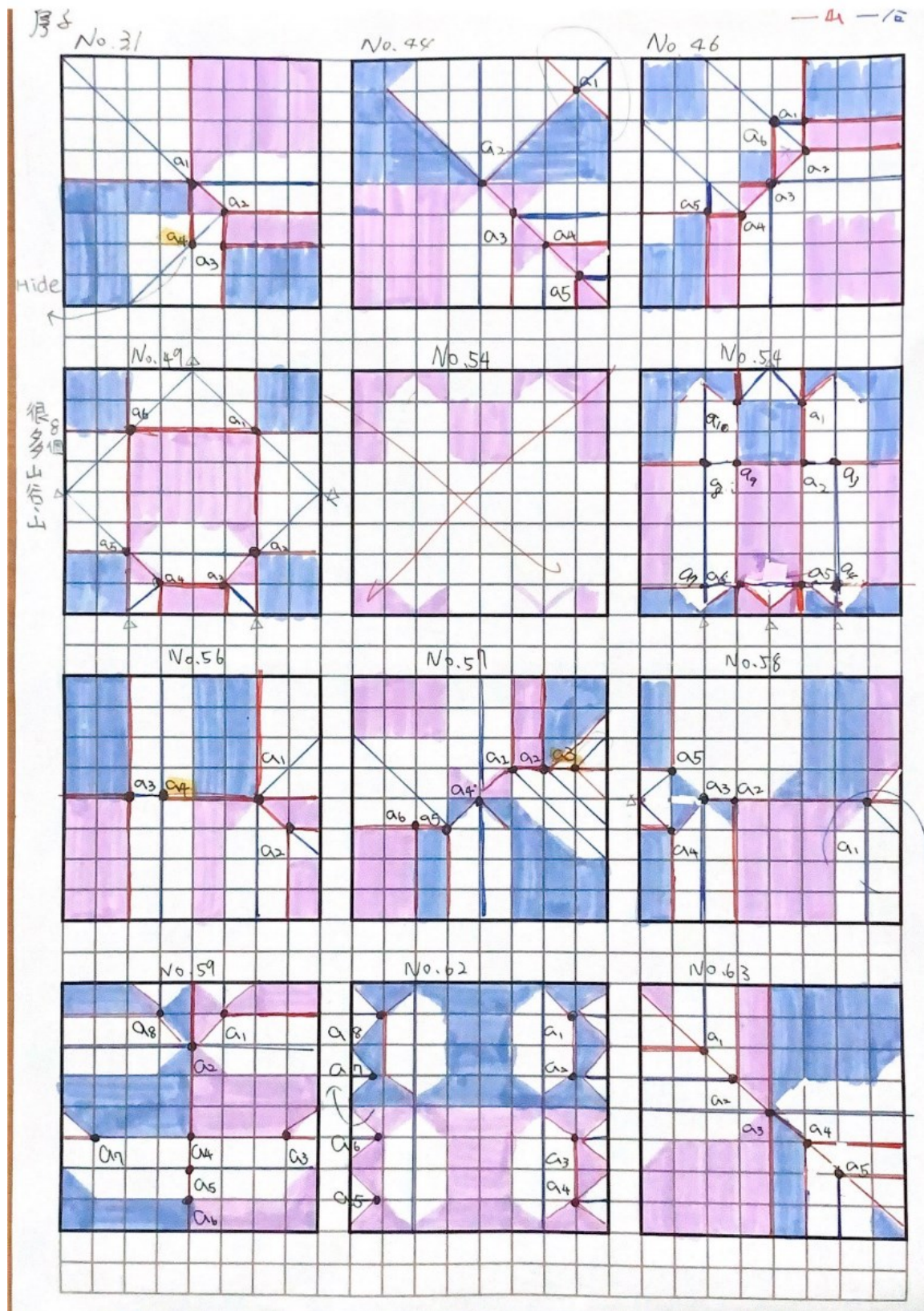
四、研究心得

一開始，黑白摺學真的讓我覺得世界變黑白!有些謎題翻來翻去，摺來摺去都沒辦法使同顏色的部分湊一起。但經過多方嘗試，從成功與失敗的摺法中，我們找出了一些基礎摺法，並跟圖形的樣子連結，慢慢地，我們摺得越來越快，也能夠看到圖就知道怎麼摺，相當有成就感!研究最後，老師請我們自己設計阿美族圖騰謎題，很具挑戰性，把進行數學研究所得到的成果設計成圖騰，讓我覺得很興奮!此外，我們也覺得其實黑白摺還有很多可以探討的方向，例如能否摺成 2×2、3×3 的正方形?原正方形方格數跟摺好正方形的方格數間是否有特定的關係?交點摺線間角度的關係等等，值得我們繼續研究下去!

柒、參考文獻資料

Mr. Elephant Papa(2021 年 5 月 23 日) · 摺紙術語(一) · 取自 <https://vocus.cc/article/60aa1489fd89780001a95db6>。

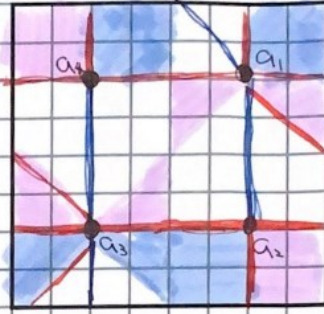
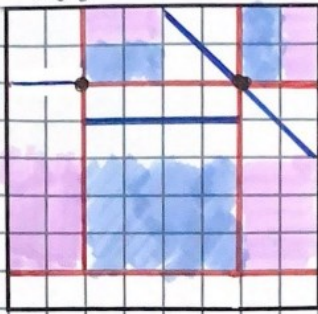
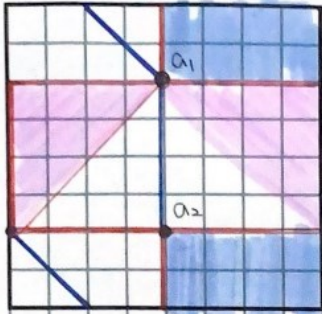
附件 畫出黑白摺學謎題摺法舉例



轉折 No 19.

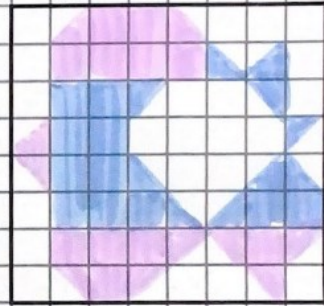
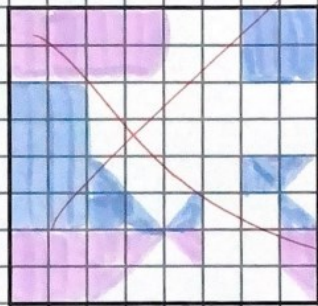
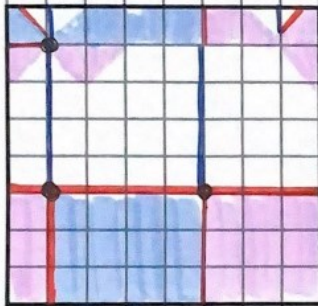
No 20.

No. 39



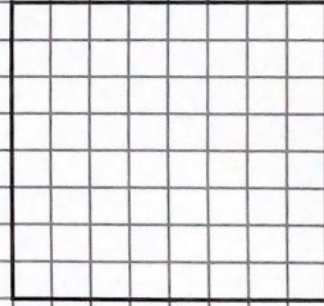
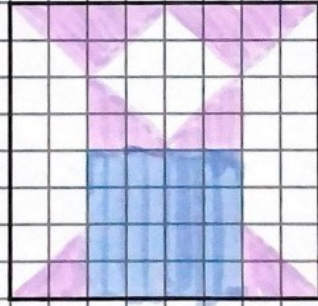
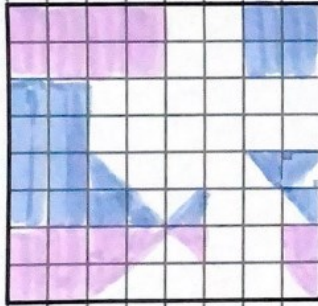
No 40

No 15



No 11.

青蛙 No 16.

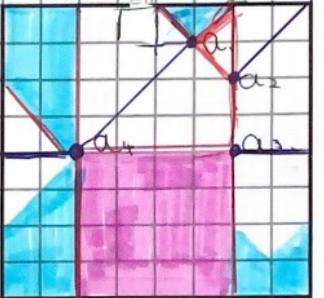
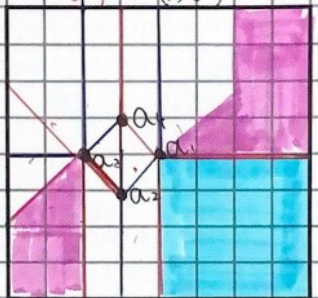
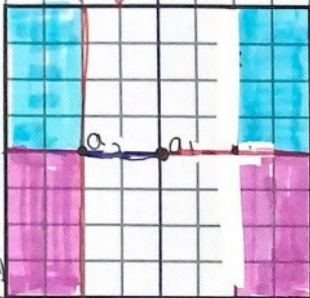


山谷
山

No 1 易

No. 9 中 (房子)

No. 37 易



翅膀

易 No 8

中 No. 15

易 No 13

